TD 13

Calcul matriciel

Exercice 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on considère les matrices $S = \dfrac{A + {}^tA}{2}$ et $T = \dfrac{A - {}^tA}{2}$.

(Q 1) Calculer S et T lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. En déduire que S et T sont respectivement symétrique et anti-symétrique.

(Q 2) Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque, S est symétrique, T est antisymétrique et $A = S + T$.

Exercice 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer toutes les matrices M telles que :

   (a) $AM = 0_3$; (b) $AM = MA$.

2. En utilisant uniquement les résultats précédents, montrer que la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 3 : [corrigé] Soit A et B deux matrices symétriques de même taille. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 4 : [corrigé] On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & -12 & -15 \\ -12 & -6 & 8 & 10 \\ 24 & 12 & -16 & -20 \\ 36 & 18 & -24 & -30 \end{pmatrix}.$$

1. On note $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice ligne L pour laquelle : $A = CL$.
2. Calculer LC et en déduire une expression simple de A^n pour tout entier positif n.

Exercice 5 : Déterminer si la matrice A est inversible puis résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les équations $AX = B$ puis $XA = B$ pour les valeurs de A et B suivantes :

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\ ;\quad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : [corrigé] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2, B^3, puis B^n pour $n \geq 3$.
2. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
3. En déduire A^n pour tout entier n.

Exercice 7 : [solutions] Calculer les puissances n-ème des matrices suivantes.

(Q 1) $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

(Q 2) $B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$

(Q 3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Q 4) $D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(Q 5) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(Q 6) $F = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 8 : [corrigé] Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Démontrer qu'il existe $a; b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_2$.

(Q 2) En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 9 : Soit j le complexe défini par $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

Calculer A^4. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 10 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.

(Q 2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 11 : [corrigé] Soit A, B et C trois matrices non nulles telles que $ABC = 0$. Montrer qu'au plus une des trois est inversible.

Exercice 12 : [indications] On dit que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est nilpotente lorsqu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que : $A^r = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})}$.

(Q 1) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

(Q 2) Montrer qu'une matrice nilpotente ne peut être inversible.

Exercice 13 :

(Q 1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$. Calculer $(I_n - M)\sum_{k=0}^{p-1} M^k$.

(Q 2) En déduire que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 14 : On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Exprimer simplement J^2 en fonction de J, puis montrer que J n'est pas inversible.

Exercice 15 : [solutions] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la décomposition de Gauss-Jordan de la matrice A. C'est à dire, touver E et R telles que $A = ER$ et R est une matrice réduite échelonnée par lignes.

Exercice 16 : [solutions] Donnez le rang des matrices suivantes et inversez-les si cela est possible.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 : [solutions] Donnez le rang des matrices suivantes et inversez-les si cela est possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \overline{a} & \overline{a}^2 \\ a & 1 & \overline{a} \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et A_λ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda+6 & \lambda \\ \lambda-4 & \lambda-6 & -\lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

(Q 1) Déterminer le rang de A en fonction de λ.

(Q 2) Résoudre alors l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivante :

$$AX = \begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda-6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 : Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 13 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Montrer que A est inversible.

(Q 2) Calculer AB.

(Q 3) En déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 20 : Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 12 & 22 & -9 \\ -4 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Calculer AB.

(Q 2) Montrer que A est inversible ainsi que AB.

(Q 3) En déduire que B est inversible.

(Q 4) Calculer l'inverse de AB puis celui de B.

Exercice 21 : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\alpha) \\ -1 & 0 & \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M^2 et M^3.
2. On pose $A(x) = I_3 + xM + \frac{x^2}{2}M^2$. Comparer $A(x+y)$ et $A(x)A(y)$.
3. En déduire que $A(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déterminer $A^{-1}(x)$.

Exercice 22 : [corrigé] Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

(Q 2) Calculer $B = P^{-1}AP$.

(Q 3) Exprimer A^n en fonction de $P; B; P^{-1}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(Q 4) Calculer B^n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(Q 5) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites vérifiant $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ et telles que $\begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n - 2v_n \\ v_{n+1} & = & 15u_n - 9v_n \end{cases}$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(Q a) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.

(Q b) En déduire X_n en fonction de $A; X_0$ et $n \in \mathbb{N}$.

(Q c) Exprimer alors le terme général des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 23 : [corrigé] Soit $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et de I_2.

(Q 2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$, et donner une expression de α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.

(Q 3) Exprimer α_{n+2} en fonction de α_{n+1} et α_n.

(Q 4) En déduire l'expression générale de A^n.

(Q 5) Application : Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$. Démontrer que ces suites convergent et calculer leurs limites.

Exercice 24 : Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix} = D + J$$

avec J la matrice formée que de 1 et $D = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)$.

(Q 1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Expliquez pourquoi on peut effectuer le calcul $a = {}^tXAX$ et dites à quel ensemble appartient a.

(Q 2) Calculer ${}^tXAX$ en utilisant $A = D + J$.

(Q 3) Montrer alors que A **est inversible.**

Indications

Exercice 12 :

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Un produit de matrices inversible est inversible.

Solution de l'exercice 7 :

1. $A^{2n} = I_2, A^{2n+1} = A$
2. $\forall n \geq 1, B^n = (\lambda+\mu)^{n-1}B$
3. $\forall n \geq 1, C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$
4. $\forall n \geq 2, D^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}T + n(n-1)2^{n-3}T^2$.
5. $E^n = 3^{n-1}E$ (par récurrence).
6. $F^n = 3^{n-1}[5^n - 1]E + 3^n I_3$.

Solution de l'exercice 15 :

$$T_{12}(-1)T_{32}(-1)T_{21}(-1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad [T_{21}(-1)]^{-1}[T_{32}(-1)]^{-1}[T_{12}(-1)]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $E = T_{21}(1)T_{32}(1)T_{12}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 16 :

1. La matrice est de rang 2 et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
2. La matrice est de rang 2 et n'est pas inversible.
3. La matrice est de rang 3 et est donc inversible. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Si $c = a$ alors la matrice est de rang 2. Sinon, elle est de rang 3 et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a(c-b)}{c-a} & \frac{b-c}{c-a} & \frac{-1}{c-a} \\ -a & 1 & 0 \\ \frac{a(b-a)}{c-a} & \frac{a-b}{c-a} & \frac{1}{c-a} \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 17 :

A Si $|a| = 1$ alors la matrice est de rang 1. Si $a = 0$ alors elle est de rang 3, égale à I_3 donc inversible et d'inverse elle même. Sinon, $a \in \mathbb{C}^* - \mathbb{U}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|a|^2} \begin{pmatrix} |a|^2 & -\bar{a} & -\bar{a}^2 \\ -a & 1+|a|^2 & -\bar{a} \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 3 :

AB est symétrique si et seulement si $(AB)^T = AB$ si et seulement si $B^T A^T = AB$ si et seulement si $BA = AB$ car A et B sont symétriques.

Correction de l'exercice 4 :

1. $L = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.
2. $LC = -34$ donc : $A^n = (CL)^n = C\underbrace{(LC)(LC)\dots(LC)}_{n-1 \text{ termes}} = C(-34)^{n-1}L = (-34)^{n-1}CL = (-34)^{n-1}A$.

Correction de l'exercice 6 :

1. Par calcul matriciel, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = O_3$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 3$, $B^n = B^{n-3}B^3 = B^{n-3}O_3 = O_3$.
2. Puisque I_3 est le neutre du produit matriciel, $BI_3 = I_3B = B$. Ainsi, B et I_3 commutent et on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :
$(B+I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k}$. On simplifie dans un premier temps $B^k I_3^{n-k}$. Puisque I_3 est le neutre, $I_3^2 = I_3 I_3 = I_3$, et plus généralement, $I_3^{n-k} = I_3$. Ainsi, $B^k I_3^{n-k} = B^k I_3 = B^k$. On en déduit :

$$\begin{aligned} (B+I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \\ &= \binom{n}{0}B^0 + \binom{n}{1}B^1 + \binom{n}{2}N^2 + O_3 \\ &\text{,car } B^k = O_3 \text{ pour } k \geq 3 \\ &= \binom{n}{0}I_3 + \binom{n}{1}B + \binom{n}{2}B^2. \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer les coefficients binômiaux. Nous avons vu en cours que $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$. Par définition, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1}{2}\frac{n!}{(n-2)!}$. Or : $n! = n(n-1)\underbrace{(n-2)(n-3)...1}_{=(n-2)!}$ donc : $n! = n(n-1)(n-2)! \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$. Ainsi, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi :

$(B+I_3)^n$
$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}}.$$

3. $A = B + I_3$ donc $A^n = (B+I_3)^n$. D'après la question précédente, nous obtenons :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}}.$$

Correction de l'exercice 9 :

(Q 1) Puisque $j^3 = 1$, $j^4 = j$ et $1 + j + j^2 = 0$, on en déduit : $A^2 = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix}$, puis $A^4 = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix}^2 = 9I_3$.

(Q 2) $A^4 = 9I_3 \Leftrightarrow A\left(\frac{A^3}{9}\right) = I_3$. En posant : $B = \frac{A^3}{9}$, on constate que $AB = BA = \frac{A^4}{9} = I_3$, ce qui prouve que B est l'inverse de A, et donc que A est inversible.

Correction de l'exercice 11 :

On raisonne par l'absurde. Si au moins deux sont inversibles alors :

1. Si A, B le sont alors $ABC = O_{nn} \Rightarrow B^{-1}A^{-1}ABC = B^{-1}A^{-1}O_{nn} \Rightarrow C = O_{nn}$ ce qui est absurde car C n'est pas nulle.
2. Si A, C le sont alors $ABC = O_{nn} \Rightarrow A^{-1}ABCC^{-1} = A^{-1}O_{nn}C^{-1} \Rightarrow B = O_{nn}$ ce qui est absurde car B n'est pas nulle.
3. Si C, B le sont alors $ABC = O_{nn} \Rightarrow ABCC^{-1}B^{-1} = O_{nn}C^{-1}B^{-1} \Rightarrow A = O_{nn}$ ce qui est absurde car A n'est pas nulle.

Correction de l'exercice 22 :

(Q 1) $$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&5&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-1&-3&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&3&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-5&2\\0&1&3&-1\end{array}\right)$$

(Q 2) Par calcul matriciel, $B = \begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&-6\\-12&-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4&0\\0&-3\end{pmatrix}$.

(Q 3) On exprime dans un premier temps A en fonction de B. Si $B = P^{-1}AP$, alors $PB = AP$ en multipliant à gauche par P et car $PP^{-1} = I_2$. En multipliant l'égalité obtenue par P^{-1} à droite, on en déduit : $A = PBP^{-1}$.
Alors : $A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PBI_2BP^{-1} = PB^2P^{-1}$. On conjecture alors : $A^n = PB^nP^{-1}$, ce que l'on vérifie par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $A^0 = I_2$, $B^0 = I_2$ donc $PB^0P^{-1} = I_2$ ce qui prouve l'initialisation.
- **Hérédité :** Si $A^n = PB^nP^{-1}$ (Hypothèse de récurrence), alors : $A^{n+1} = A^nA = PB^nP^{-1}A$ (d'après l'hypothèse de récurrence). Or : $A = PBP^{-1}$ donc : $PB^nP^{-1}A = PB^nP^{-1}PBP^{-1} = PB^nBP^{-1} = PB^{n+1}B^{-1}$. Ce qui prouve l'hérédité.

(Q 4) On en déduit, par exemple par récurrence, que : $B^n = \begin{pmatrix}(-4)^n&0\\0&(-6)^n\end{pmatrix}$, puis $A^n = PB^nP^{-1}$ donc :
$$A^n = \begin{pmatrix}-5\times(-4)^n+6\times(-3)^n & 2\times(-4)^n-2\times(-3)^n\\ -15\times(-4)^n+15\times(-3)^n & 6\times(-4)^n-5\times(-3)^n\end{pmatrix}$$

(Q 5) (Qa) Nous avons : $X_{n+1} = AX_n$.

(Qb) On en déduit : $X_n = A^nX_0$ par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $A_0 = I_2$ donc : $A_0X_0 = X_0$ ce qui prouve l'initialisation.
- **Hérédité :** Si $X_n = A^nX_0$ (hypothèse de récurrence), alors : $X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0$, ce qui prouve l'hérédité.

(Qc) Ici $X_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, donc par calcul matriciel : $X_n = \begin{pmatrix}2(-1)^n(4^n-3^n)\\(-1)^n(6.4^n-5.3^n)\end{pmatrix}$. Par conséquent : $u_n = 2(-1)^n(4^n-3^n)$ et $v_n = (-1)^n(6.4^n-5.3^n)$.

Correction de l'exercice 23 :

(Q 1) Par produit matriciel, $A^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}21&15\\20&16\end{pmatrix}$. Or,
$\begin{pmatrix}21&15\\20&16\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}3&3\\4&2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix} = 5\times 6A + 6I_2$.
On en déduit : $A^2 = \frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2$.

(Q 2) Notons $\mathcal{P}(n)$ « Il existe deux nombres réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_nA + \beta_nI_2$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, nous avons : $I^2 = A^0 = \alpha_0A + \beta_0I_2$ avec $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$.
- **Hérédité :** Si $A^n = \alpha_nA + \beta_nI_2$ pour un certain n fixé, alors : $A^{n+1} = A^nA = \alpha_nA^2 + \beta_nA$. On en déduit : $A^{n+1} = \alpha_n\left(\frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2\right) + \beta_nA$ c'est à dire : $A^{n+1} = \left(\frac{5}{6}\alpha_n + \beta_n\right) + \frac{\alpha_n}{6}I_2$. En posant : $\alpha_{n+1} = \frac{5}{6}\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n}{6}$, on prouve alors l'hérédité.

(Q 3) Puisque : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = \frac{5}{6}\alpha_n + \beta_n$ on en déduit : $\alpha_{n+2} = \frac{5}{6}\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$. Or $\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n}{6}$

d'après ci-dessus, donc : $\alpha_{n+2} = \frac{5}{6}\alpha_{n+1} + \frac{1}{6}\alpha_n$.

(Q 4) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire double. On résout : $r^2 = \frac{5}{6}r + \frac{1}{6} \Leftrightarrow r = 1$ ou $r = -\frac{1}{6}$. Il s'ensuit : $\alpha_n = A + B\left(-\frac{1}{6}\right)^n$. Or $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$ (car $A = \alpha_1 A + \beta_1 I_2$ avec $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$) donc : $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - \frac{B}{6} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{6}{7} \\ A = \frac{6}{7} \end{cases}$ Conclusion : $\alpha_n = \frac{6}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right)$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n}{6}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n = \frac{\alpha_{n-1}}{6}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{A^n = \frac{6}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) A + \frac{1}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) I_2.}$$

(Q 5) Si l'on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, alors : $X_{n+1} = AX_n$ donc : $X_n = A^n X_0$ (voir l'exercice ci-dessus pour les détails). De plus, d'après l'énoncé, $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donc $AX_0 = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{2a+b}{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$X_n = \frac{6}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) AX_0 + \frac{1}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) X_0,$$

ce qui donne :

$$u_n = \frac{3(a+b)}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) + \frac{a}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) \to \frac{4a+3b}{7}$$

$$v_n = \frac{4a+2b}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) + \frac{b}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) \to \frac{4a+3b}{7}.$$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆